의예과

수학 영역

가천대

1. 2 이상인 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$과 직선 $y=\ln(2n-1)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\left(S_n+n\ln\frac{2}{n}\right)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

2. 다음 조건을 만족시키는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오.

(가) $0<x<1$일 때, $\dfrac{\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}$이다.

(나) $0\le x\le 1$일 때, $0<f(x)\le 1$이다.

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

3. 실수 t와 함수 $f(x) = -x^3 + 6x$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수를 n이라 할 때, 함수 $g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

> (가) $n = 1$일 때, x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 해가 $x = \alpha$이면 $g(t) = \alpha^2$이다.
>
> (나) $n \geq 2$일 때, $g(t)$는 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 가장 작은 실근과 가장 큰 실근의 곱이다.

$\lim_{t \to -4\sqrt{2}+} g(t) + \lim_{t \to 4\sqrt{2}+} g(t)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

4. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+1}{(x-2)^2} & (x < 1) \\ b\left(e^{x-1} + \ln x + 3(x-1)^2\right) & (x \geq 1) \end{cases}$$

가 있다. 양수 s에 대하여 점 $(s, 0)$과 점 $(x, f(x))$사이의 거리가 $x = t$에서 최소일 때, 실수 $f(t)$의 값을 $g(s)$라 하자. 함수 $g(s)$의 역함수를 $h(s)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a, b는 상수이다.)

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

정답 및 해설

1. 일반 정보

유형	논술 고사	
전형명	의예 모의 논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 Ⅰ, 수학 Ⅱ, 미적분
출제범위	핵심개념 및 용어	미분과 수열의 극한

2. 문항 및 제시문

2 이상인 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$과
직선 $y=\ln(2n-1)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\left(S_n+n\ln\frac{2}{n}\right)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

3. 출제 의도

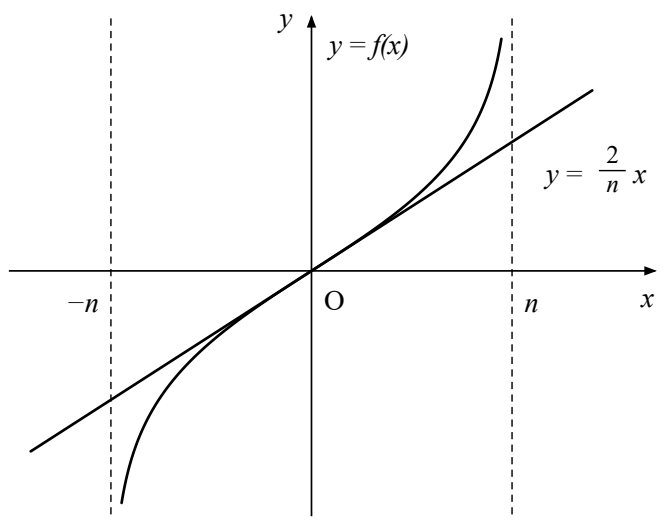
미분과 수열의 극한

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2024	미적분 (72p,2번)

5. 문항 해설

$y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$라 하자. 로그의 진수 조건에 의하여 $n+x>0$, $n-x>0$이므로 $-n<x<n$. 즉, 함수 $f(x)$의 정의역은 열린구간 $(-n,n)$이다. $f'(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{-1}{n-x}=\frac{2n}{n^2-x^2}$ 이므로 $-n<x<n$에서 $f'(x)>0$이다. $-n<x<n$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다. 또한, $\lim_{x\to -n+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to n-}f(x)=\infty$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$y=\ln(2n-1)$과 $y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$이 만나는 점은 $(n-1,\ln(2n-1))$이다. 곡선 $y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$과 직선 $y=\ln(2n-1)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_n은 $S_n=(n-1)\ln(2n-1)-\int_0^{n-1}\ln(n+x)-\ln(n-x)\,dx$이다. $\int_0^{n-1}\ln(n+x)-\ln(n-x)\,dx=(2n-1)\ln(2n-1)-2n\ln n$ 이므로

$S_n=2n\ln n-n\ln(2n-1)$ 이다.

$$\left(S_n+n\ln\frac{2}{n}\right)=2n\ln n-n\ln(2n-1)+n\ln 2-n\ln n$$
$$=n\ln 2n-n\ln(2n-1)=\ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(S_n+n\ln\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-2n\times -1/2}}=\ln\frac{1}{e^{-1/2}}$$

6. 채점 기준

답안	배점
$(n-1,\ln(2n-1))$	3
$S_n=(n-1)\ln(2n-1)-\int_0^{n-1}\ln(n+x)-\ln(n-x)dx$	6
$S_n=2n\ln n-n\ln(2n-1)$	6
$\lim_{n\to\infty}\left(S_n+n\ln\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{2}$	5

1. 일반 정보

유형	논술 고사	
전형명	의예 모의 논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 Ⅱ, 미적분학
출제범위	핵심개념 및 용어	정적분

2. 문항 및 제시문

다음 조건을 만족시키는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오.

(가) $0<x<1$일 때, $\dfrac{\int_0^x tf(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}$이다.
(나) $0\le x\le 1$일 때, $0<f(x)\le 1$이다.

3. 출제 의도

정적분의 값 구하기

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강 (미적분)	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2024	p76 참고 p81 유제7

5. 문항 해설

$0<x<1$일 때 (가) 식의 양변을 미분하면

$$\frac{e^x(e^x-x-1)}{(e^x-1)^2}=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}\left[x-\frac{\int_0^x tf\right.$$
$$=\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}\left[x-\frac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}\right]$$
$$=\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}\left[\frac{e^x-x-1}{e^x-1}\right]$$

즉, $\dfrac{f(x)}{\int_0^x f(t)dt}=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ 이다. $\int_0^x f(t)dt=\frac{e^x-1}{e^x}f(x)=(1-e^{-x})f(x)$의 양변을 미분해서 정리하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-x}}=1$이다. 이제 양변을 적분하면

$\ln f(x)=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=x+C$이므로 $f(x)=ke^x$이다.($k=e^C>0$, C는 적분상수)

$f(x)$는 증가함수이므로 (나)에 의해서 $f(x)\le f(1)=ke\le 1$이고 $k\le\frac{1}{e}$이다.

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)\le\frac{e^{1/2}}{e}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 이다. $f(x)=\frac{e^x}{e}$일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최댓값은 $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 이다.

6. 채점 기준

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

답안	배점
$\dfrac{f(x)}{\displaystyle\int_0^x f(t)dt} = \dfrac{e^x}{e^x-1}$ 또는 $\int_0^x f(t)dt = \frac{e^x-1}{e^x}f(x) = (1-e^{-x})f(x)$	7
$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1-e^{-x}}{1-e^{-x}} = 1$	7
$\ln f(x) = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = x + C$ 또는 $f(x) = e^C e^x = ke^x$	4
$f\left(\frac{1}{2}\right)$의 최댓값은 $\frac{1}{\sqrt{e}}$.	2

1. 일반 정보

유형	논술 고사	
전형명	의예 모의 논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 Ⅱ
출제범위	핵심개념 및 용어	극한, 도함수의 응용

2. 문항 및 제시문

실수 t와 함수 $f(x) = -x^3 + 6x$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 서로 다른 실근의 개수를 n이라 할 때, 함수 $g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

> (가) $n = 1$일 때, x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 해가 $x = \alpha$이면 $g(t) = \alpha^2$이다.
> (나) $n \geq 2$일 때, $g(t)$는 x에 대한 방정식 $f(x) = t$의 가장 작은 실근과 가장 큰 실근의 곱이다.

$\lim_{t\to -4\sqrt{2}+} g(t) + \lim_{t\to 4\sqrt{2}+} g(t)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

3. 출제 의도

불연속 함수의 우극한 구하기

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강 (수학 2)	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2024	28(3번)

5. 문항 해설

3차 방정식 $x^3 - 6x + t = 0$의 실근을 크기 순으로 α, β, γ라 하자. 즉, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$이고 $\alpha \neq \gamma$이다. 3차 방정식의 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha\beta\gamma = -t$이므로 $g(t) = \alpha\gamma = -\frac{t}{\beta}$이다. 또한, $\beta^3 - 6\beta + t = 0$이므로

$$g(t) = -\frac{t}{\beta} = \frac{\beta^3 - 6\beta}{\beta} = \beta^2 - 6$$

$y = -x^3 + 6x$의 도함수는 $x = \pm\sqrt{2}$의 좌우에서 부호가 바뀌고 극댓값은 $4\sqrt{2}$, 극솟값은 $-4\sqrt{2}$. 따라서 $x^3 - 6x + t = 0$이 서로 다른 2개 이상의 실근을 가지기 위한 t의 범위는 $[-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}]$이고, 이때 $g(t) = -\frac{t}{\beta} = \beta^2 - 6$이다. 그 외의 구간에서는 한 개의 실근을 갖고, 이때 $f(x) = t$의 해가 $x = \alpha$이면 $g(t) = \alpha^2$이다. 구간 $[-4\sqrt{2}, 0]$에서 β의 값이 $-\sqrt{2}$에서 0으로 증가할 때 $g(t)$의 값은 -4에서 -6으로 감소한다. 구간 $[0, 4\sqrt{2}]$에서 β의 값이 0에서 $\sqrt{2}$로 증가할 때 $g(t)$의 값은 -6에서 -4로 증가한다. 따라서 $\lim_{t\to -4\sqrt{2}+} g(t) = -4$. 또한, $|t| > 4\sqrt{2}$일 때 $|\alpha| > 2\sqrt{2}$이므로 $g(t) > 8$이고, $\lim_{t\to 4\sqrt{2}+} g(t) = 8$이다. 결국,

$$\lim_{t\to -4\sqrt{2}+} g(t) + \lim_{t\to 4\sqrt{2}+} g(t) = -4 + 8 = 4$$

6. 채점 기준

답안	배점
$x^3 - 6x + t = 0$의 실근을 크기 순으로 α, β, γ라 할 때, $g(t) = -\frac{t}{\beta} = \frac{\beta^3 - 6\beta}{\beta} = \beta^2 - 6$	6
서로 다른 2개 이상의 실근을 가지기 위한 t의 범위는 $[-4\sqrt{2}.4\sqrt{2}]$.	4
$\lim_{t\to -4\sqrt{2}+} g(t) = -4$	5
$\lim_{t\to 4\sqrt{2}+} g(t) = 8$	5

1. 일반 정보

유형	논술 고사	
전형명	의예 모의 논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 Ⅱ, 미적분학
출제범위	핵심개념 및 용어	미분가능과 연속, 여러 가지 미분법

2. 문항 및 제시문

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+1}{(x-2)^2} & (x < 1) \\ b\left(e^{x-1} + \ln x + 3(x-1)^2\right) & (x \geq 1) \end{cases}$$

가 있다. 양수 s에 대하여 점 $(s, 0)$과 점 $(x, f(x))$사이의 거리가 $x = t$에서 최소일 때, 실수 $f(t)$의 값을 $g(s)$라 하자. 함수 $g(s)$의 역함수를 $h(s)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a, b는 상수이다.)

3. 출제 의도

미분가능과 연속 및 여러 가지 미분법 적용

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강 (미적분)	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2024	57(1번)

5. 문항 해설

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+1}{(x-2)^2} & (x < 1) \\ b\left(e^{x-1} + \ln x + 3(x-1)^2\right) & (x \geq 1) \end{cases}$$

가 $x = 1$에서 미분가능하므로 연속이다. 따라서 $a + 1 = b$을 만족하고, 미분계수가 존재하므로 $3a + 2 = 2b$를 만족한다. 따라서, $a = 0, b = 1$이다.

최소 거리이기 위해서는 점 $Q(s, 0)$와 점 $P(t, f(t))$에 대하여 P에서의 접선과 직선 PQ가 서로 수직이다.

$t \geq 1$일 때, $\left(\dfrac{e^{t-1} + \ln t + 3(t-1)^2}{t-s}\right) \times \left(e^{t-1} + \dfrac{1}{t} + 6(t-1)\right) = -1$ 이므로

$s = \left(e^{t-1} + \ln t + 3(t-1)^2\right) \times \left(e^{t-1} + \dfrac{1}{t} + 6(t-1)\right) + t$를 만족한다.

이때, $g(s) = f(t) = e^{t-1} + \ln t + 3(t-1)^2$ 이고 $t = 1$일 때, $s = 3$이므로 $g(3) = f(1) = 1$이고 역함수 $h(1) = 3$이다.

$g(h(s)) = s$를 미분하면 $h'(s) = \frac{1}{g'(h(s))}$ 이므로 $h'(1) = \frac{1}{g'(h(1))} = \frac{1}{g'(3)}$을 계산한다.

$$g'(s) = f'(t)\frac{dt}{ds} = \left(e^{t-1} + \frac{1}{t} + 6(t-1)\right) \times \left(\left(e^{t-1} + \frac{1}{t} + 6(t-1)\right)^2 + \left(e^{t-1} + \ln t + 3(t-1)^2\right)\left(e^{t-1} - \frac{1}{t^2} + 6\right)\right)$$

이므로 $g'(3) = \frac{2}{11}$ 이고, $h'(1) = \frac{1}{g'(3)} = \frac{11}{2}$ 이다.

6. 채점 기준

답안	배점
$a = 0, b = 1$	6
$\left(\dfrac{e^{t-1} + \ln t + 3(t-1)^2}{t-s}\right) \times \left(e^{t-1} + \dfrac{1}{t} + 6(t-1)\right) = -1$	4
$g'(3) = \frac{2}{11}$	6
$h'(1) = \frac{11}{2}$	4

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.