의예과

수학 영역

가천대

1. 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$라 할 때,

$$f_n\left((-a)^n\right)+(-1)^n\times f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)+f_{n+1}\left(f_{n+2}(a^n)\right)$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 2 이상의 자연수 k에 대하여 두 함수 $y=\log_M(x+k)+m$, $y=\log_M(-x+k)+m$의 그래프의 교점을 A라 하고, 삼각형 ABC가 정삼각형이 되도록 하는 x축 위의 서로 다른 두 점을 B, C라 할 때, $\sqrt{3}<\overline{\mathrm{BC}}<2\sqrt{3}$을 만족시키는 k의 개수를 구하는 과정을 서술하시오.

[15점]

2. 등비수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<a_1<\dfrac{\pi}{2}$, $0<a_2<\dfrac{\pi}{2}$이고 $\tan a_1=\dfrac{3}{4}$, $\tan a_2=\dfrac{1}{3}$이다.

(나) $\tan b_1=\dfrac{1}{4}$

(다) 모든 자연수 n에 대하여 $0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$이고

$$(1-\tan a_n\tan b_n)\tan b_{n+1}=\tan a_n+\tan b_n$$

이다.

$\lim_{n\to\infty} b_n=b$라 할 때, $\tan b$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. [20점]

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

3. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(a)$와 $\displaystyle\int_0^{2a} f(x)\,dx$의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a>1$)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(2a-x)=2a^2$이다.

(나) $\displaystyle\int_0^{2a}\{f(x)-x\}\,dx=36$

(다) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+5)^2 f(x+a)\,dx=440$

[20점]

4. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 두 실수 a, b와 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi f(x)}{2}=\frac{ae^x-b}{e^x+1}$$

를 만족시킨다. 첫째항이 $4a^3-13a^2+12a-2$이고 공비가 $\frac{1}{3}b^3-\frac{3}{2}b^2+2b$인 모든 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a\ge 0$, $b\ge 0$) [20점]

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

5. 첫째항이 0인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \times k \times (n-k+1)^2$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k = -78$일 때, 자연수 m의 값을 구하는 과정을 서술하시오. [20점]

6. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx}{e^x}$$

라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $g(x) = |t - f(x)|$가 $x = p$에서 미분가능하지 않은 실수 p의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(t)$가 $t = k$에서 불연속인 실수 k의 값은 2개이다.

(나) $\lim_{t \to 0+} h(t) + \lim_{t \to 0-} h(t) + h(0) = 3$

집합 $A = \{\alpha \mid$ 점 $(\alpha, f(\alpha))$는 곡선 $y = f(x)$의 변곡점, α는 실수$\}$의 서로 다른 두 원소 α, β에 대하여 $f'(\alpha) \times f'(\beta)$의 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오.

(단, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$) [20점]

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

7. 네 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{{a_n}^2+2}{2a_n},\quad b_n=\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}},\quad c_{n+1}=\frac{c_n+2}{c_n+1},\quad d_n=\frac{c_n-\sqrt{2}}{c_n+\sqrt{2}}$$

을 만족시킨다. $b_8=(b_1)^p$, $d_8=(d_1)^q$, $a_8=c_m$일 때, 자연수 p, q, m의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a_1=c_1=1$) [20점]

8. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

(가) 모든 실수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

(나) 함수 $f'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖는다.

(다) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,-3)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $g(f'(2))=117$이다.

[15점]

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

논술고사 기출문제 답안 및 해설 수학 (의예)

[의예1]

1. 일반 정보 [의예1]

항목	내용	
유형	논술고사	
전형명	의예 논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 Ⅰ
출제범위	핵심개념 및 용어	지수, 로그
예상 소요 시간	10분 / 전체 80분	

2. 문항 및 제시문

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f_n(a)$라 할 때,

$$f_n\left((-a)^n\right)+(-1)^n\times f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)+f_{n+1}\left(f_{n+2}(a^n)\right)$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. 2 이상의 자연수 k에 대하여 두 함수 $y=\log_M(x+k)+m$, $y=\log_M(-x+k)+m$의 그래프의 교점을 A라 하고, 삼각형 ABC가 정삼각형이 되도록 하는 x축 위의 서로 다른 두 점을 B, C라 할 때, $\sqrt{3}<\overline{\mathrm{BC}}<2\sqrt{3}$을 만족시키는 k의 개수를 구하는 과정을 서술하시오.

[15점]

3. 출제 의도

지수와 로그의 이해

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	18

5. 문항 해설

실수 a와 자연수 n에 따라 다음과 같이 경우를 나누어 계산한다.

(1) $a>0$이고 n이 홀수일 때, $(-a)^n<0$, $(-a)^{n+1}>0$, $a^n>0$이므로

$f_n\left((-a)^n\right)=1$, $f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)=2$, $f_{n+2}(a^n)=1$ 이다. 따라서
$f_n\left((-a)^n\right)+(-1)^n\times f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)+f_{n+1}\left(f_{n+2}(a^n)\right)=1$

(2) $a>0$이고 n이 짝수일 때, $(-a)^n>0$, $(-a)^{n+1}<0$, $a^n>0$이므로
$f_n\left((-a)^n\right)=2$, $f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)=1$, $f_{n+2}(a^n)=2$ 이다. 따라서
$f_n\left((-a)^n\right)+(-1)^n\times f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)+f_{n+1}\left(f_{n+2}(a^n)\right)=4$

(3) $a=0$이고 n이 홀수일 때, $f_n(0)=f_{n+1}(0)=f_{n+2}(0)=1$ 이다. 따라서
$f_n\left((-a)^n\right)+(-1)^n\times f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)+f_{n+1}\left(f_{n+2}(a^n)\right)=2$

(4) $a=0$이고 n이 짝수일 때, $f_n(0)=f_{n+1}(0)=f_{n+2}(0)=1$ 이다. 따라서
$f_n\left((-a)^n\right)+(-1)^n\times f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)+f_{n+1}\left(f_{n+2}(a^n)\right)=3$

(5) $a<0$이고 n이 홀수일 때, $(-a)^n>0$, $(-a)^{n+1}>0$, $a^n<0$이므로
$f_n\left((-a)^n\right)=1$, $f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)=2$, $f_{n+2}(a^n)=1$ 이다. 따라서
$f_n\left((-a)^n\right)+(-1)^n\times f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)+f_{n+1}\left(f_{n+2}(a^n)\right)=1$

(6) $a<0$이고 n이 짝수일 때, $(-a)^n>0$, $(-a)^{n+1}>0$, $a^n>0$이므로
$f_n\left((-a)^n\right)=2$, $f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)=1$, $f_{n+2}(a^n)=2$ 이다. 따라서
$f_n\left((-a)^n\right)+(-1)^n\times f_{n+1}\left((-a)^{n+1}\right)+f_{n+1}\left(f_{n+2}(a^n)\right)=4$

따라서 최댓값 $M=4$, 최솟값 $m=1$이다.

두 함수 $y=\log_4(x+k)+1$, $y=\log_4(-x+k)+1$의 교점 $\mathrm{A}\left(0,\,1+\log_4 k\right)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\log_4 k+1)$이다.

따라서 $\sqrt{3}<\overline{\mathrm{BC}}<2\sqrt{3}$를 만족시키는 $2<k<16$이므로 k의 개수는 13개다.

[의예2]

1. 일반 정보 [의예2]

항목	내용	
유형	논술 고사	
전형명	의예 논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 Ⅱ, 미적분
출제범위	핵심개념 및 용어	삼각함수의 덧셈정리, 등비수열의 합
예상 소요 시간	10분 / 전체 80분	

2. 문항 및 제시문

등비수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<a_1<\dfrac{\pi}{2}$, $0<a_2<\dfrac{\pi}{2}$이고 $\tan a_1=\dfrac{3}{4}$, $\tan a_2=\dfrac{1}{3}$이다.
(나) $\tan b_1=\dfrac{1}{4}$
(다) 모든 자연수 n에 대하여 $0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$이고

$$(1-\tan a_n\tan b_n)\tan b_{n+1}=\tan a_n+\tan b_n$$

이다.

$\lim_{n\to\infty} b_n=b$라 할 때, $\tan b$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. [20점]

3. 출제 의도

삼각함수의 성질을 활용하여 수열의 극한값 구하기

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능완성	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	14, 85

5. 문항 해설

삼각함수 덧셈정리에 의하여

$$\tan(a_1-a_2)=\frac{\tan a_1-\tan a_2}{1+\tan a_1\tan a_2}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{1+\frac{3}{4}\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}=\tan a_2$$

이다. 또한, $-\dfrac{\pi}{2}<a_1-a_2<\dfrac{\pi}{2}$, $0<a_2<\dfrac{\pi}{2}$이므로 탄젠트 함수의 성질에 의해 $a_1=2a_2$이 성립하고 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 $a_n=a_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

(다) 조건과 삼각함수 덧셈정리에 의하여

$$\frac{\tan b_{n+1}-\tan b_n}{1+\tan b_{n+1}\tan b_n}=\tan(b_{n+1}-b_n)=\tan a_n$$

이다. $-\dfrac{\pi}{2}<b_{n+1}-b_n<\dfrac{\pi}{2}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $b_{n+1}-b_n=a_n$이 성립한다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=-b_1+b_{n+1}$$

이므로

$$\frac{a_1}{1-\frac{1}{2}}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k=-b_1+\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=-b_1+b.$$

따라서 $b=b_1+2a_1$이다. 삼각함수의 덧셈정리에 의하여 $\tan 2a_1=\dfrac{24}{7}$이고,

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

$$\tan b=\tan(b_1+2a_1)=\frac{\tan b_1+\tan 2a_1}{1-\tan b_1\tan 2a_1}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{24}{7}}{1-\frac{1}{4}\frac{24}{7}}=\frac{103}{4}.$$

[의예3]

1. 일반 정보 [의예3]

항목	내용	
유형	논술 고사	
전형명	의예 논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 Ⅱ, 미적분
출제범위	핵심개념 및 용어	적분의 활용
예상 소요 시간	10분 / 전체 80분	

2. 문항 및 제시문

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(a)$와 $\int_0^{2a} f(x)\,dx$의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a>1$)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(2a-x)=2a^2$이다.

(나) $\int_0^{2a}\{f(x)-x\}\,dx=36$

(다) $\int_{-1}^{1}(x+5)^2 f(x+a)\,dx=440$

[20점]

3. 출제 의도

적분의 활용

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능완성 (수학2적분)	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	63(12)

5. 문항 해설

$f(x+a)+f(2a-(x+a))=f(x+a)+f(a-x)=2a^2$이므로

$g(x)=f(x+a)-a^2$라 하면 $g(x)+g(-x)=f(x+a)-a^2+f(-x+a)-a^2=0$이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$는 원점 대칭이다. $g(x)=x^3+bx$라 하자.

$f(x)=g(x-a)+a^2$이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=g(x)$을 오른쪽으로 a만큼, 위로 a^2만큼 이동한 곡선이다. 따라서 곡선 $y=f(x)$는 점 (a,a^2)에 대칭이다.

$f(x)=g(x-a)+a^2=(x-a)^3+b(x-a)+a^2$이다.

$$\begin{aligned}\int_0^{2a} f(x)\,dx&=\int_0^{2a}\left\{(x-a)^3+b(x-a)+a^2\right\}dx\\&=\int_{-a}^{a}\left(t^3+bt+a^2\right)dt=2a^3\quad(t=x-a\text{로 치환})\end{aligned}$$

(나) $36=\int_0^{2a}\{f(x)-x\}\,dx=\int_0^{2a}f(x)\,dx-\int_0^{2a}x\,dx=2a^3-2a^2.$

$a^3-a^2-18=(a-3)(a^2+2a+6)=0$이므로 $a=3$. 따라서

$f(x)=(x-3)^3+b(x-3)+9.$

(다)

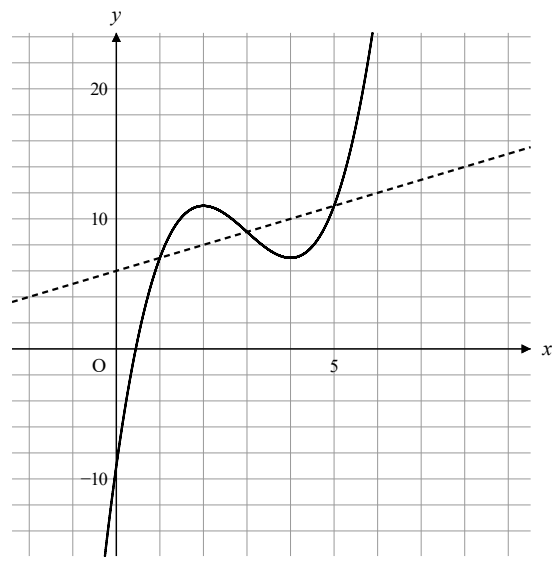
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x+5)^2 f(x+a)\,dx&=\int_{-1}^{1}(x+5)^2 f(x+3)\,dx=\int_{-1}^{1}(x+5)^2\left(x^3+bx+9\right)dx\\&=\int_{-1}^{1}(x+5)^2\left(x^3+bx\right)dx+9\int_{-1}^{1}(x+5)^2\,dx\\&=20\int_0^1 x\left(x^3+bx\right)dx+18\int_0^1\left(x^2+25\right)dx\quad(\because x^3+\\&=20\left(\frac{1}{5}+\frac{b}{3}\right)+18\left(\frac{1}{3}+25\right)=\frac{20b}{3}+460\end{aligned}$$

$\frac{20b}{3}+460=440.\ b=-3.$

$f(x)=(x-3)^3-3(x-3)+9$이다.

$a=3,\ f'(a)=f'(3)=b=-3,$

$\int_0^{2a} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left(a^2-a+a^2+a\right)(2a)=2a^3=54.$



[의예4]

1. 일반 정보 [의예4]

항목	내용	
유형	논술고사	
전형명	의예 논술전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	미적분
출제범위	핵심개념 및 용어	역함수의 미분법
예상 소요 시간	10분 / 전체 80분	

2. 문항 및 제시문

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 두 실수 a, b와 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi f(x)}{2}=\frac{ae^x-b}{e^x+1}$$

를 만족시킨다. 첫째항이 $4a^3-13a^2+12a-2$이고 공비가 $\frac{1}{3}b^3-\frac{3}{2}b^2+2b$인 모든 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 최댓값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a\geq 0$, $b\geq 0$) [20점]

3. 출제 의도

역함수의 미분계수의 이해

4. 출제 근거

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강 (미적분)	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	53(3)

5. 문항 해설

$g(x)=x+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x$라 하자. 그러면 $g'(x)=1+\cos\frac{\pi}{2}x\geq 0$이다. 정수 k에 대하여 $x=4k+2$에서만 $g'(x)=0$ 이므로 $g(x)$는 열린구간 $(4k-2,\,4k+2)$에서 증가한다. 또한 최대·최소 정리에 의해 연속함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[4k-2,\,4k+2]$에서 최댓값과 최솟값을 가져야 하는데, 열린구간 $(4k-2,\,4k+2)$에 $g(x)$의 극점이 존재하지 않기 때문에 닫힌구간 $[4k-2,\,4k+2]$에서 $g(x)$의 최댓값과 최솟값은 각각 $g(4k+2)=(4k+2)$와 $g(4k-2)=(4k-2)$이다. 즉, $g(x)$는 닫힌구간 $[4k-2,\,4k+2]$에서 증가한다. 따라서 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고, $g(x)$의 역함수가 존재한다. $h(x)=\dfrac{ae^x-b}{e^x+1}$라 하자.

① 만약 $a+b\neq 0$이면, $h'(x)=\dfrac{(a+b)e^x}{(e^x+1)^2}>0$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-b$이다. 따라서 모든 실수 x에 대해 함수 $h(x)$는 $-b<h(x)<a$를 만족시킨다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g(f(x))=h(x)$의 양변을 미분하여 $g'(f(x))f'(x)=h'(x)$를 얻을 수 있다. 그런데 모든 실수 x에 대해 $h'(x)>0$이므로 모든 실수 x에 대해 $g'(f(x))\neq 0$이다. 따라서 모든 실수 x와 정수 k에 대해 $f(x)\neq 4k+2$이다. $f(x)=g^{-1}(h(x))$이므로 모든 실수 x와 정수 k에 대해 $h(x)\neq g(4k+2)=4k+2$이고, 따라서 모든 실수 x에 대해 함수 $h(x)$는 $-2<h(x)<2$를 만족시키고, $a\leq 2$, $b\leq 2$가 성립한다.

② 만약 $a=0$이고, $b=0$이면 모든 실수 x에 대해 $f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서 $0\leq a\leq 2$와 $0\leq b\leq 2$가 성립한다.

이때, 함수 $y=4x^3-13x^2+12x-2$는 닫힌구간 $[0,2]$에서 최댓값 2를 가지고, 함수 $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x$는 닫힌구간 $[0,2]$에서 최솟값 0, 최댓값 $\frac{5}{6}$을 가지므로, $a_1=2$이고, 공비가 $\frac{5}{6}$일 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$는 최댓값 12를 갖는다.

[의예5]

1. 일반 정보 [의예5]

항목	내용	
유형	의예 논술 고사	
전형명	논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 I
출제범위	핵심개념 및 용어	수열
예상 소요 시간	10분 / 전체 80분	

2. 문항 및 제시문

첫째항이 0인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\times k\times(n-k+1)^2$$

이다. $\sum\limits_{k=1}^{m}a_k=-78$일 때, 자연수 m의 값을 구하는 과정을 서술하시오. [20점]

3. 출제 의도

귀납적으로 정의되는 수열에 대한 이해 확인.

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	92,86

5. 문항 해설

자연수 n이 짝수일 때

$$\begin{aligned}
a_{2n}&=(2n-1)^2-2(2n-2)^2+\cdots-n^3+\cdots-(2n-2)2^2+(2n-1)\\
&=(2n-1)^2-2(2n-2)^2+\cdots+(n-1)(n+1)^2-n^3\\
&\quad+(2n-1)-(2n-2)2^2+\cdots+(n+1)(n-1)^2\\
&=(2n-1)(2n)-2(2n-2)(2n)+\cdots+(n-1)(n+1)(2n)-n^3\\
&=\{(2n-1)-2(2n-2)+\cdots+(n-1)(n+1)\}(2n)-n^3\\
&=\left\{\left(n^2-(n-1)^2\right)-\left(n^2-(n-2)^2\right)+\cdots+\left(n^2-1^2\right)\right\}(2n)-n^3\\
&=\left\{\left(n^2-n^2+\cdots+n^2-n^2+n^2\right)-(n-1)^2+(n-2)^2-\cdots+2^2-1^2\right\}(\\
&=\left\{n^2-(n-1)^2+(n-2)^2-\cdots+2^2-1^2\right\}(2n)-n^3\\
&=\left\{-1^2+2^2-3^2+4^2+\cdots-(n-1)^2+n^2\right\}(2n)-n^3
\end{aligned}$$

$$=\{(-1+2)(1+2)+(-3+4)(3+4)+\cdots+(-n+1+n)(n-1+n)\}(2n)-$$

$$=\{1+2+3+4+\cdots+(n-1)+n\}(2n)-n^3=\frac{n(n+1)(2n)}{2}-n^3=n^2$$

같은 방법으로, 자연수 n이 홀수일 때

$$\begin{aligned}
a_{2n}&=(2n-1)^2-2(2n-2)^2+\cdots+n^3-\cdots-(2n-2)2^2+(2n-1)\\
&=\left\{\left(n^2-n^2+\cdots+n^2-n^2\right)-(n-1)^2+(n-2)^2-\cdots-2^2+1^2\right\}(2n)+\\
&=-[1+2+3+4+\cdots+n-1](2n)+n^3=-\frac{(n-1)(n)(2n)}{2}+n^3=n^2
\end{aligned}$$

따라서 임의의 자연수 n에 대하여 $a_{2n}=n^2$이다.

$$\begin{aligned}
a_{2n+1}&=-(2n)^2+2(2n-1)^2-3(2n-2)^2+\cdots-(2n-1)2^2+(2n)\\
&=-(2n)^2+(2n-1)^2-2(2n-2)^2+\cdots-(2n-2)2^2+(2n-1)\\
&\qquad+(2n-1)^2-(2n-2)^2+\cdots-2^2+1\\
&=-(2n)^2+a_{2n}+(2n-1)^2-(2n-2)^2+\cdots-2^2+1^2\\
&=a_{2n}+\left\{-(2n)^2+(2n-1)^2-(2n-2)^2+(2n-3)^2-\cdots-2^2+1^2\right\}\\
&=a_{2n}+\{(-2n+(2n-1))(2n+(2n-1))+\cdots+(-2+1)(2+1)\}\\
&=n^2-\{2n+(2n-1)+\cdots+2+1\}=n^2-\frac{2n(2n+1)}{2}=-n(n+1)
\end{aligned}$$

결국, 자연수 n에 대하여 $a_{2n}=n^2$, $a_{2n+1}=-n(n+1)$이다.

$$\sum_{k=1}^{2n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}\left(-k^2+k\right)+\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\ (>$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n-1}a_k&=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{2k}\right)-a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\left(-k^2+k\right)+\sum_{k=1}^{n}k^2-n^2\\
&=\sum_{k=1}^{n}k-n^2=\frac{1}{2}n(n+1)-n^2=\frac{n}{2}(1-n)\ (<0)
\end{aligned}$$

이고, 주어진 조건이 $\sum\limits_{k=1}^{m}a_k=-78\ (<0)$이므로 m은 홀수이고 $m=25$이다.

[의예6]

1. 일반 정보 [의예6]

항목	내용	
유형	논술 고사	
전형명	의예 논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 II, 미적분
출제범위	핵심개념 및 용어	미분
예상 소요 시간	10분 / 전체 80분	

2. 문항 및 제시문

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx}{e^x}$$

라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)=|t-f(x)|$가 $x=p$에서 미분가능하지 않은 실수 p의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 값은 2개이다.
(나) $\lim_{t\to0+}h(t)+\lim_{t\to0-}h(t)+h(0)=3$

집합 $A=\{\alpha \mid \text{점 } (\alpha,f(\alpha))\text{는 곡선 } y=f(x)\text{의 변곡점}, \alpha\text{는 실수}\}$의 서로 다른 두 원소 α, β에 대하여 $f'(\alpha)\times f'(\beta)$의 최솟값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$) [20점]

3. 출제 의도

다항함수와 지수함수의 미분 및 미분가능 개념 이해와 변곡점 계산

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능완성	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	140
수능특강	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	66

5. 문항 해설

$g(x)=|t-f(x)|$이므로 미분가능하지 않은 실수 x의 값은 직선 $y=t$와 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표 중에 존재한다. $f'(x)=\frac{-x^3+(3-a)x^2+(2a-b)x+b}{e^x}$이고 $e^x>0$이므로 $f'(x)=0$의 근은 $-x^3+(3-a)x^2+(2a-b)x+b=0$의 근과 같고, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 x축이 점근선이다.

조건 (가)에서 불연속인 실수의 값은 2개이므로 $y=f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같이 생각할 수 있다.

(1) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 3개인 경우, 조건 (가)를 만족하려면 두 개의 극댓값이 같고 극솟값이 0이어야 한다.
따라서 $\lim_{t\to0+}h(t)+\lim_{t\to0-}h(t)+h(0)=4+1+1=6$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(2) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 2개인 경우, 조건 (가)를 만족하려면 $f'(x)$는 $x=0$에서 중근을 가져야 한다. 따라서 $\lim_{t\to0+}h(t)+\lim_{t\to0-}h(t)+h(0)=2+1+0=3$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(3) $f'(x)=0$의 서로 다른 실근이 1개인 경우, 극댓값만 존재한다.
$\lim_{t\to0+}h(t)+\lim_{t\to0-}h(t)+h(0)=2+1+1=4$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 $-x^3+(3-a)x^2+(2a-b)x+b=0$은 $x=0$에서 중근을 가져야 하므로 $a=b=0$이고 $f(x)=\frac{x^3}{e^x}$이다. 변곡점을 구하면 $f''(x)=\frac{x^3-6x^2+6x}{e^x}$이므로 $x^2-6x+6=0$의 두 근이 0이 아닌 두 변곡점의 x좌표이다. 두 변곡점의 x좌표를 각각 α,β라 하면 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=6$이다.

따라서 $f'(\alpha)f'(\beta)=\frac{\alpha^2(3-\alpha)}{e^\alpha}\frac{\beta^2(3-\beta)}{e^\beta}=\frac{\alpha^2\beta^2(9-3\alpha-3\beta+\alpha\beta)}{e^{\alpha+\beta}}=-\frac{108}{e^6}$
이다.

[의예7]

1. 일반 정보 [의예7]

항목	내용	
유형	논술 고사	
전형명	의예 논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 Ⅰ
출제범위	핵심개념 및 용어	수열
예상 소요 시간	10분 / 전체 80분	

2. 문항 및 제시문

네 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{{a_n}^2+2}{2a_n},\quad b_n=\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}},\quad c_{n+1}=\frac{c_n+2}{c_n+1},\quad d_n=\frac{c_n-\sqrt{2}}{c_n+\sqrt{2}}$$

을 만족시킨다. $b_8=(b_1)^p$, $d_8=(d_1)^q$, $a_8=c_m$일 때, 자연수 p, q, m의 값을 모두 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a_1=c_1=1$) [20점]

3. 출제 의도

여러 수열의 상호 연관성 찾기

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강 (수학 Ⅰ)	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	92(9번), 93(1번)

5. 문항 해설

$$b_1=\frac{a_1-\sqrt{2}}{a_1+\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=-(1-\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}-3$$

$$d_1=\frac{c_1-\sqrt{2}}{c_1+\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=b_1\text{이다.}$$

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\sqrt{2}}{a_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{{a_n}^2+2}{2a_n}-\sqrt{2}}{\frac{{a_n}^2+2}{2a_n}+\sqrt{2}}=\frac{{a_n}^2-2\sqrt{2}\,a_n+2}{{a_n}^2+2\sqrt{2}\,a_n+2}=\left(\frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=(b_n)^2$$

이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $b_{n+1}=(b_n)^2$이 성립한다. 따라서

$$b_8=(b_7)^2=(b_6)^4=(b_5)^8=\cdots=(b_1)^{128}$$

이므로 $p=128$.

$$d_{n+1}=\frac{c_{n+1}-\sqrt{2}}{c_{n+1}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{c_n+2}{c_n+1}-\sqrt{2}}{\frac{c_n+2}{c_n+1}+\sqrt{2}}=\frac{c_n+2-\sqrt{2}\,c_n-\sqrt{2}}{c_n+2+\sqrt{2}\,c_n+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{2})(c_n-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(c_n+\sqrt{2})}=d_1d_n$$

이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $d_{n+1}=d_1d_n$이다. 따라서

$$d_8=d_1d_7=d_1^2d_6=d_1^3d_5=\cdots=d_1^7d_1=d_1^8$$

이므로 $q=8$.

또한, $d_{2^7}=(d_1)^{2^7}=b_8=\frac{a_8-\sqrt{2}}{a_8+\sqrt{2}}=1+\frac{-2\sqrt{2}}{a_8+\sqrt{2}}$이고,
$d_{2^7}=\frac{c_{2^7}-\sqrt{2}}{c_{2^7}+\sqrt{2}}=1+\frac{-2\sqrt{2}}{c_{2^7}+\sqrt{2}}$이므로 $a_8=c_{2^7}$.
따라서 $a_8=c_{128}$이므로 $m=128$.

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

[의예8]

1. 일반 정보 [의예8]

항목	내용	
유형	논술 고사	
전형명	의예 논술 전형	
출제영역	수학	
출제범위	교육과정 과목명	수학 Ⅱ
출제범위	핵심개념 및 용어	함수의 최댓값과 최솟값, 접선의 방정식
예상 소요 시간	5분 / 전체 80분	

2. 문항 및 제시문

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a, b, c는 상수이다.)

> (가) 모든 실수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.
>
> (나) 함수 $f'(x)$는 $x=-1$에서 최솟값을 갖는다.
>
> (다) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,-3)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $g\big(f'(2)\big)=117$이다.

[15점]

3. 출제 의도

함수의 최댓값과 최솟값, 접선의 방정식에 대한 이해

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강 수학 Ⅱ	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	66(3)

5. 문항 해설

조건 (가)에 의해 방정식 $f'(x)=3x^2+2ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 수 없으므로 $a^2-3b\le 0$이 성립한다. 조건 (나)에 의해 $-\dfrac{2a}{6}=-1$이므로, $a=3$이고, $b\ge 3$이다. $f'(2)=12+4a+b=24+b$이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2,-3)$에서의 접선의 방정식은

$$y=f'(-2)(x+2)-3=(12-4a+b)(x+2)-3=bx+2b-3$$

이므로 조건 (다)에 의해 $b(b+24)+2b-3=117$이다. 따라서 $b=4$이다. 조건 (다)에 의해

$$f(-2)=-8+4a-2b+c=-3$$

이므로, $c=1$이고, 따라서 $f(3)=27+9a+3b+c=67$이다.

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.