의예과

수학 영역

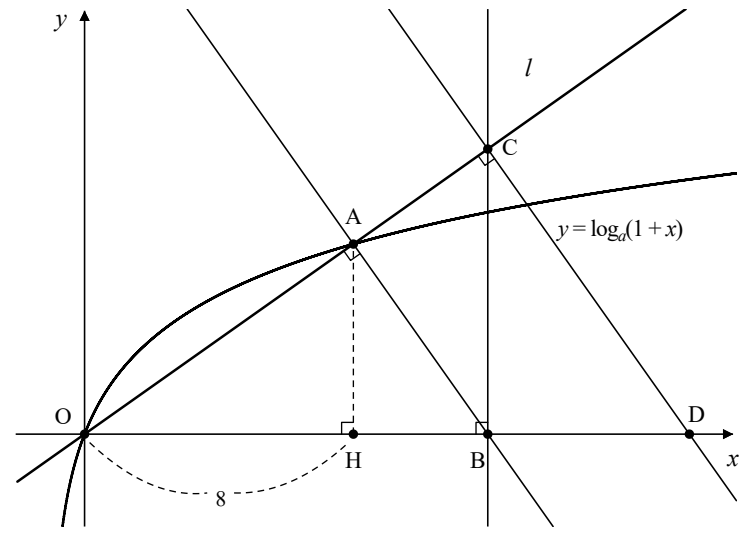
가천대

1. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=2\cos t+2\sqrt{3}a\sin^2 t,\quad y=\frac{\sqrt{3}}{32}(\tan t+a\cot t)$$

이다. $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 점 P의 속력이 0인 순간이 존재할 때, 이 순간 점 P의 가속도의 크기를 b라 하자. a와 b의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, a는 상수이다.)

2. 아래와 같이 원점 $O(0,0)$을 지나며 기울기가 양수인 직선 l과 곡선 $y=\log_a(1+x)$이 만나는 점 중 제 1사분면 위의 점을 A라 하자. 점 A를 지나고 직선 l과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하고, 점 B를 지나고 x축과 수직인 직선이 l과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 직선 l과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 D라 하자. 이때, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CD}}=2:3$을 만족하고 A의 x좌표가 8이다. 두 실수 p, q에 대하여 곡선 $y=\log_a(1+x-p)+q$이 두 점 A, C를 지날 때, a, p, $3^{\frac{q}{2\sqrt{2}}}$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a>1$이다.)



문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

3. 자연수 k와 정수가 아닌 실수 a에 대하여 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음을 만족시킨다.

> (가) $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고, 공차가 k인 등차수열이다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $b_n = \frac{a_n+10+|a_n-10|}{2}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n b_{n+1}}$의 값을 c_k라 하자. $c_5 = \frac{17}{500}$일 때, c_2, c_{10}, $\lim_{k\to\infty} kc_k$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

4. 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동해서 얻은 곡선과 곡선 $y=|x|$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하자.

> (가) $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 일대일대응이다.
>
> (나) 삼차 함수 $g(x)=ax^3+bx+1$는 실수 전체의 집합에서 감소함수이고 $2b+1=\frac{1}{e}$이다. (단, 자연지수 e는 $2.5<e<3$이다.)
>
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=\frac{x}{2}+1$을 만족시킨다.

$A=\frac{1}{160e^2}$일 때, a의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

정답 및 해설

수학

[문제 1]

1. 일반 정보

항목	내용
유형	논술 고사
전형명	의예 모의 논술 전형
출제영역	수학
출제범위 — 교육과정 과목명	수학 I, 수학 II, 미적분
출제범위 — 핵심개념 및 용어	미분, 속도와 가속도
예상 소요 시간	7분 / 전체 50분

2. 문항 및 제시문

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 위치 (x,y)가

$$x=2\cos t+2\sqrt{3}a\sin^2 t,\quad y=\frac{\sqrt{3}}{32}(\tan t+a\cot t)$$

이다. $0<t<\frac{\pi}{2}$에서 점 P의 속력이 0인 순간이 존재할 때, 이 순간 점 P의 가속도의 크기를 b라 하자. a와 b의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

(단, a는 상수이다.)

3. 출제 의도

속력과 가속도의 크기 구하기

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강 (미적분)	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	67(8번)

5. 문항 해설

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin t+4\sqrt{3}a\sin t\cos t=-2\sin t(1-2\sqrt{3}a\cos t),$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{32}(\sec^2 t-a\csc^2 t).$$

속력이 0일 때 $\frac{dx}{dt}=0$이고 $\frac{dy}{dt}=0$이다.

$-2\sin t(1-2\sqrt{3}a\cos t)=0$에서 $\sin t\neq 0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$이므로

$1-2\sqrt{3}a\cos t=0$이다. $\cos t=\frac{1}{2\sqrt{3}a}$, 즉 $\sec t=2\sqrt{3}a$.

$\frac{1}{32}(\sec^2 t-a\csc^2 t)=0$에서 $\tan^2 t=a$이고 $a>0$.

$a=\tan^2 t=\sec^2 t-1=12a^2-1$로부터 $12a^2-a-1=0$, $(3a-1)(4a+1)=0$.

$a>0$이므로 $a=\frac{1}{3}$.

$\cos t=\frac{1}{2\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $t=\frac{\pi}{6}$이다.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\cos t+\frac{4\sqrt{3}}{3}\cos 2t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\sqrt{3}}{32}\left(2\sec^2 t\tan t+\frac{2}{3}\csc^2 t\cot t\right).$$

$t=\frac{\pi}{6}$에서 가속도의 크기 b는

$$b=\sqrt{\left(-2\cos\frac{\pi}{6}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{3}}{16}\left(\sec^2\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\csc^2\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2}$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left\{\frac{\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\right\}^2}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}.$$

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$.

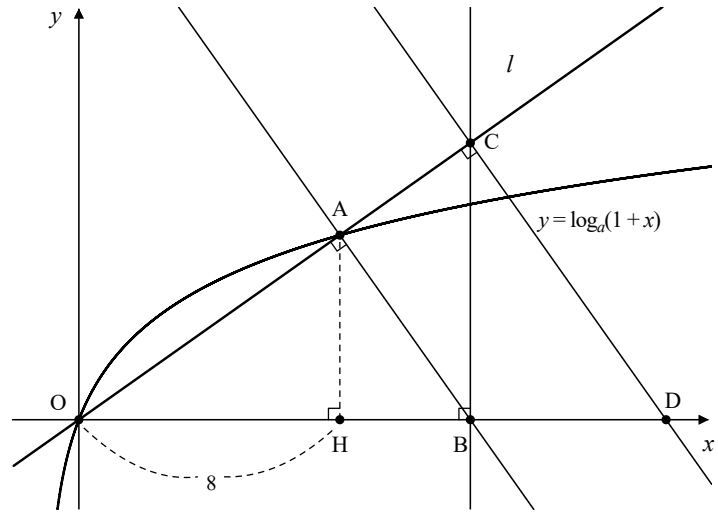
[문제 2]

1. 일반 정보

항목	내용
유형	논술 고사
전형명	의예 모의 논술 전형
출제영역	수학
출제범위 — 교육과정 과목명	수학 I
출제범위 — 핵심개념 및 용어	지수 함수와 로그 함수
예상 소요 시간	10분 / 전체 50분

2. 문항 및 제시문

아래와 같이 원점 $O(0,0)$을 지나며 기울기가 양수인 직선 l과 곡선 $y=\log_a(1+x)$이 만나는 점 중 제 1사분면 위의 점을 A라 하자. 점 A를 지나고 직선 l과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하고, 점 B를 지나고 x축과 수직인 직선이 l과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 직선 l과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 D라 하자. 이때, $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{CD}}=2:3$을 만족하고 A의 x좌표가 8이다. 두 실수 p, q에 대하여 곡선 $y=\log_a(1+x-p)+q$이 두 점 A, C를 지날 때, a, p, $3^{\frac{q}{2\sqrt{2}}}$의 값을 구하는 과정을 서술하시오. (단, $a>1$이다.)



3. 출제 의도

지수 함수와 로그 함수의 이해

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강 (수학I)	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	33(3번)

5. 문항 해설

$\triangle OAB\sim\triangle OCD$이고 $\overline{AB}:\overline{CD}=2:3$이므로 $\overline{OA}:\overline{OC}=2:3$.

$\triangle OAH\sim\triangle OCB$이고 $\overline{OA}:\overline{OC}=2:3$이므로 $\overline{OH}:\overline{OB}=2:3$.

$\overline{OH}=8$이므로 $\overline{OB}=12$이다. 따라서 점 C의 x좌표는 12.

$\triangle OAH\sim\triangle OBA$이므로 $\overline{OH}:\overline{OA}=\overline{OA}:\overline{OB}$이고 $(\overline{OA})^2=\overline{OH}\cdot\overline{OB}=(8)(12)$.

따라서 $\overline{OA}=4\sqrt{6}$, $\overline{AH}=4\sqrt{2}$, $\frac{\overline{AH}}{\overline{OH}}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이고

직선 l의 방정식은 $y=\frac{\overline{AH}}{\overline{OH}}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x$이다.

점 A는 $y=\log_a(1+x)$위의 점이므로 A의 좌표는 $(8,\log_a 9)$

점 C는 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$위의 점이므로 C의 좌표는 $(12,6\sqrt{2})$.

$\overline{AH}=4\sqrt{2}=\log_a 9$로부터 $a=3^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$.

두 점 A와 C가 곡선 $y=\log_a(1+x-p)+q$위에 있기 위해서는 아래의 두 식이 성립해야 한다.

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

$$4\sqrt{2} = \log_a(9-p) + q,$$

$$6\sqrt{2} = \log_a(13-p) + q.$$

아래 식에서 위의 식을 빼면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다:

$$2\sqrt{2} = \log_a\left(\frac{13-p}{9-p}\right) \quad \Rightarrow \quad a^{2\sqrt{2}} = 3^{\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = 3 = \frac{13-p}{9-p}.$$

따라서 다음과 같은 값을 얻는다.

$$p = 7, \quad q = 4\sqrt{2} - \log_a 2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\log_3 2 = \log_3\left(\frac{9}{2}\right)^{2\sqrt{2}}.$$

최종적으로 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$p = 7, \quad 3^{\frac{q}{2\sqrt{2}}} = \frac{9}{2}$$

[문제 3]

1. 일반 정보

항목	내용
유형	논술 고사
전형명	의예 모의 논술 전형
출제영역	수학
출제범위 — 교육과정 과목명	미적분
출제범위 — 핵심개념 및 용어	수열의 극한, 급수
예상 소요 시간	15분 / 전체 50분

2. 문항 및 제시문

자연수 k와 정수가 아닌 실수 a에 대하여 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음을 만족시킨다.

(가) $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고, 공차가 k인 등차수열이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $b_n = \frac{a_n+10+|a_n-10|}{2}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n b_{n+1}}$의 값을 c_k라 하자. $c_5 = \frac{17}{500}$일 때, c_2, c_{10}, $\lim_{k\to\infty} kc_k$의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

3. 출제 의도

수열의 극한, 급수의 이해

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강 (미적분)	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	23(3번)

5. 문항 해설

(가)에 의해 $a_n = a + (n-1)k$이다. 자연수 n에 대하여 만약 $a_n < 10$이면

$$b_n = \frac{a_n + 10 + |a_n - 10|}{2} = \frac{a_n + 10 + (10 - a_n)}{2} = 10$$

이고, 만약 $a_n \geq 10$이면

$$b_n = \frac{a_n + 10 + |a_n - 10|}{2} = \frac{a_n + 10 + (a_n - 10)}{2} = a_n$$

이다. $k = 5$일 때, $a + 5(n-1) \geq 10$을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 p라 하자. 이때, 자연수 n에 대하여 만약 $n < p$이면 $b_n = 10$이고, $n \geq p$이면 $b_n = a + 5(n-1)$이므로

$$c_5 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+5(n-1))(a+5n)} & (p=1) \\ \displaystyle\frac{p-2}{100} + \frac{1}{10b_p} + \sum_{n=p}^{\infty}\frac{1}{(a+5(n-1))(a+5n)} & (p \geq 2) \end{cases}$$

이고, $\frac{1}{(a+k(n-1))(a+kn)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{a+k(n-1)} - \frac{1}{a+kn}\right)$을 이용하여 이를 풀면

$$c_5 = \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{5a} & (p=1) \\ \displaystyle\frac{p-2}{100} + \frac{1}{10(a+5(p-1))} + \frac{1}{5(a+5(p-1))} & (p \geq 2) \end{cases}$$

이다. $c_5 = \frac{17}{500}$에 대해 다음 경우들을 생각해보자.

만약 $p=1$이라면, $a = \frac{100}{17}$가 되는데 이는 $a+5(p-1) \geq 10$에 모순이다.

만약 $p=2$이라면, $a = \frac{65}{17}$가 되는데, 이 역시 $a+5(p-1) \geq 10$에 모순이다.

만약 $p=3$이라면, $a = \frac{5}{2}$가 되고, $a+5(n-1) \geq 10$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값도 3이다.

$p \geq 4$인 경우에는

$$\frac{3}{10(a+5(p-1))} = \frac{17}{500} - \frac{p-2}{100} \leq \frac{7}{500}$$

인데, $a+5(p-1) \geq 10 > 0$이어야 하므로, $a+5(p-1) \geq \frac{150}{7}$을 얻을 수 있고, 따라서 $a+5(p-2) \geq \frac{115}{7} > 10$이므로, $a+5(n-1) \geq 10$을 만족하는 자연수 n의 최솟값이 p가 아니게 된다.

따라서 $a = \frac{5}{2}$이다.

$k=2$일 때, $\frac{5}{2} + 2(n-1) \geq 10$을 만족하는 자연수 n의 최솟값은 5이므로,

$$b_n = \begin{cases} 10 & (n < 5) \\ \frac{5}{2} + 2(n-1) & (n \geq 5) \end{cases}$$

이고, 따라서

$$c_2 = \frac{3}{100} + \frac{1}{10b_5} + \sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{5}{2}+2(n-1)\right)\left(\frac{5}{2}+2n\right)} = \frac{3}{100} + \frac{1}{105} + \frac{1}{21} = \frac{61}{700}$$

이다. 다음으로, $k \geq 8$에 대하여

$$b_n = \begin{cases} 10 & (n=1) \\ \frac{5}{2} + (n-1)k & (n \geq 2) \end{cases}$$

이므로,

$$c_k = \frac{1}{10b_2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{5}{2}+k(n-1)\right)\left(\frac{5}{2}+kn\right)} = \frac{1}{10k+25} + \frac{1}{k\left(k+\frac{5}{2}\right)} = \frac{k+10}{k(10k+$$

이다. 따라서 $c_{10} = \frac{20}{10\times 125} = \frac{2}{125}$이고, $\lim_{k\to\infty} kc_k = \lim_{k\to\infty}\frac{k(k+10)}{k(10k+25)} = \frac{1}{10}$이다.

[문제 4]

1. 일반 정보

항목	내용
유형	논술 고사
전형명	의예 모의 논술 전형
출제영역	수학
출제범위 — 교육과정 과목명	수학 II
출제범위 — 핵심개념 및 용어	정적분
예상 소요 시간	10분 / 전체 50분

2. 문항 및 제시문

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.

다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동해서 얻은 곡선과 곡선 $y=|x|$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하자.

(가) $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 일대일대응이다.

(나) 삼차 함수 $g(x)=ax^3+bx+1$는 실수 전체의 집합에서 감소함수이고 $2b+1=\frac{1}{e}$이다. (단, 자연지수 e는 $2.5<e<3$이다.)

(다) 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=\frac{x}{2}+1$을 만족시킨다.

$A=\frac{1}{160e^2}$일 때, a의 값을 구하는 과정을 서술하시오.

3. 출제 의도

역함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대칭임을 활용해서 영역의 넓이를 정적분으로 구하기

4. 출제 근거

도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수
수능특강 (수학 II)	EBS 교육방송 편집부	한국교육방송공사	2025	93(1번)

5. 문항 해설

$f(x)$가 실수 전체의 집합에서 일대일대응이므로 역함수가 존재하고

$$(f^{-1}\circ f)(ax^3+bx+1)=ax^3+bx+1=g(x)=f^{-1}\left(\frac{x}{2}+1\right).$$

$\frac{x}{2}+1=t$로 놓으면 $x=2(t-1)$이므로

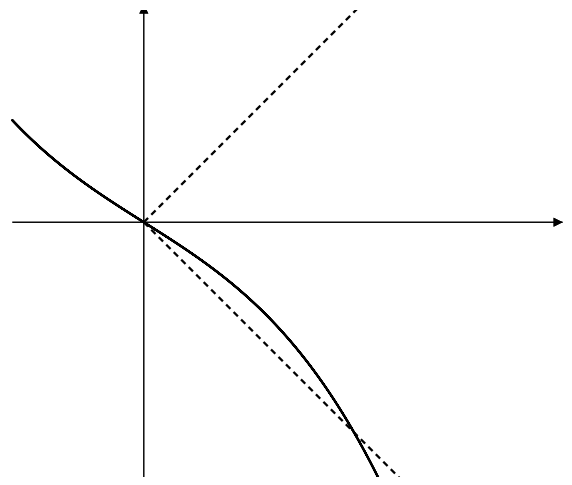
$$f^{-1}(t)=8a(t-1)^3+2b(t-1)+1$$

따라서 f^{-1}는 감소하는 삼차 함수이다. 문제에서 주어진 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동해서 얻은 곡선과 곡선 $y=|x|$로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -1, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동해서 얻은 곡선 $y=8ax^3+2bx$과 곡선 $x=|y|$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

곡선 $y=8ax^3+2bx$와 곡선 $x=|y|$의 교점은 $x=0$과 $x=\sqrt{-\frac{2b+1}{8a}}$이다.

$0<x<\sqrt{-\frac{2b+1}{8a}}$일 때, $0>\frac{1}{e}-1>8ax^2+2b>-1$이므로

$0>8ax^3+2bx=x(8ax^2+2b)>-x$이다. 따라서 곡선 $y=8ax^3+2bx$와 곡선 $x=|y|$의 그래프는 다음과 같다.



$\alpha=\sqrt{-\frac{2b+1}{8a}}=\sqrt{-\frac{1}{8ae}}$라 놓으면

$$A=\int_0^{\alpha}(8ax^3+2bx)-(-x)\,dx=\left[2ax^4+\frac{1}{2e}x^2\right]_0^{\alpha}=-\frac{1}{32ae^2}$$

이므로 $A=\frac{1}{160e^2}$를 만족시키는 a는 $a=-5$.

문제 저작권: 가천대학교 · 조판: SN독학기숙학원 (학습용)
정답 및 해설은 SNarGPT(snarGPT.ai)에서도 확인할 수 있습니다.