

16번 정답 ④

[대수 · 수열의 귀납적 정의와 음수항 규칙 추론]

1. 비양수항의 합과 최초 위치

$|a_n| - a_n$ 은 양수항에서 0, 비양수항에서  $-2a_n$ 이므로, 첫 15항 중 비양수항의 합은  $-86$ 이다. 0인 항도 개수에는 포함되지만 합에는 영향을 주지 않는다.

최초 비양수항을  $a_k$ 라 하면  $2 \leq k \leq 15$ 이다. 그 전까지는  $6n$ 씩 빼므로

$$a_k = a_1 - 3k(k-1), \quad -6(k-1) < a_k \leq 0.$$

오른쪽 부등식은  $a_{k-1} > 0$ 에서 얻는다.

2. 두 칸 간격의 규칙 찾기

$a_{k+1} = a_k + 6k > 6 > 0$ 이고,  $a_{k+2} = a_k - 6 < 0$ 이다. 같은 과정을 반복하면 모든 정수  $m \geq 0$ 에 대하여

$$\begin{aligned} a_{k+2m} &= a_k - 6m \leq 0, \\ a_{k+2m+1} &= a_k + 6k + 6m > 0 \end{aligned}$$

이다. 실제로 첫 식의 항에  $6(k+2m)$ 을 더하면 둘째 식이 되고, 여기서  $6(k+2m+1)$ 을 빼면 다음 비양수항  $a_k - 6(m+1)$ 이 된다. 따라서 비양수항은 두 칸 간격으로 나타나며 공차는  $-6$ 이다.

3. 비양수항의 개수로 경우 나누기

첫 15항 중 비양수항의 개수를  $L$ 이라 하면  $k \geq 2$ 이므로  $1 \leq L \leq 7$ 이고,

$$La_k - 3L(L-1) = -86.$$

$a_k$ 가 정수이므로  $L$ 은 86의 약수이다. 따라서  $L = 1$  또는 2이다.

①  $L = 1$ :  $k = 14, 15$ 이고  $a_k = -86$ 이다. 그러나 각각  $a_k > -78$ ,  $a_k > -84$ 이어야 하므로 불가능하다.

②  $L = 2$ :  $2a_k - 6 = -86$ 에서  $a_k = -40$ 이다.  $a_k, a_{k+2}$ 만 첫 15항에 포함되므로

$$k+2 \leq 15 < k+4 \implies k = 12, 13.$$

두 경우 모두  $-6(k-1) < -40 \leq 0$ 을 만족한다.  $a_1 = a_k + 3k(k-1)$ 을 이용하면 다음과 같다.

| $k$ | $a_1 = -40 + 3k(k-1)$ |
|-----|-----------------------|
| 12  | 356                   |
| 13  | 428                   |

두 경우 모두  $a_{k-1} = -40 + 6(k-1) > 0$ 이고 그 이전 항은 더 크므로 실제 최초 비양수항이  $a_k$ 이다. 이후 비양수항은  $-40, -46$ 으로 합이  $-86$ 이 되어 주어진 조건을 만족한다.

따라서 구하는 합은  $356 + 428 = \boxed{784}$ 이고, 정답은 ④이다.

18번 정답 ②

[미적분 I · 접선의  $y$ 절편 함수와 삼차함수의 결정]

출제의도 및 평가요소

곡선 위의 점에서의 접선의  $y$ 절편 함수를 도출하고 절댓값 함수의 극대 조건과 삼차방정식의 실근 개수 조건을 결합하여 삼차함수를 유일하게 결정할 수 있는지 평가한다.

단계별 풀이

곡선  $y = f(x)$  위의 점  $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(t) = f'(t)(x - t) \iff y = f'(t)x + \{f(t) - tf'(t)\}$$

이므로 접선의  $y$ 절편은  $h(t) = f(t) - tf'(t)$ 이다. 따라서  $g(t) = |h(t)|$ 이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수를  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$h(t) = (t^3 + bt^2 + ct + d) - t(3t^2 + 2bt + c) = -2t^3 - bt^2 + d$$

이다.  $h(t)$ 를 미분하면  $h'(t) = -6t^2 - 2bt = -2t(3t + b)$ 이다.

조건 (가)에서  $g(t) = |h(t)|$ 가  $t = 1$ 에서 극댓값 5를 갖는다. 극댓값이  $5 > 0$ 이므로  $t = 1$ 의 근방에서  $h(t) \neq 0$ 이고  $g(t)$ 는 미분가능하다. 따라서

$$g'(1) = 0 \iff h'(1) = 0 \iff -2(3 + b) = 0 \implies b = -3$$

이다.  $b = -3$ 을 대입하면  $h'(t) = -6t(t-1)$ 이므로  $h(t)$ 는  $t = 0$ 에서 극소,  $t = 1$ 에서 극대를 갖는다. 이때  $g(t) = |h(t)|$ 가  $t = 1$ 에서 극대가 되려면  $h(1) > 0$ 이어야 한다. ( $h(1) < 0$ 이면 절댓값을 취했을 때 극소가 된다.) 따라서  $h(1) = 5$ 이어야 하므로

$$h(1) = -2(1)^3 - (-3)(1)^2 + d = 1 + d = 5 \implies d = 4$$

이다.

현재까지  $f(x) = x^3 - 3x^2 + cx + 4$ 이다. 조건 (나)에서 방정식  $f(x) = 0$ 이 서로 다른 실근을 정확히 2개 가지므로,  $f(x)$ 는 하나의 중근과 다른 하나의 실근을 갖는다. 즉,  $f(x) = (x-r)^2(x-s)$  ( $r \neq s$ )로 인수분해된다. 식을 전개하면  $f(x) = x^3 - (2r+s)x^2 + (r^2+2rs)x - r^2s$ 이므로 계수를 비교하면

$$2r + s = 3 \implies s = 3 - 2r$$

$$-r^2s = 4 \implies -r^2(3-2r) = 4 \implies 2r^3 - 3r^2 - 4 = 0$$

이다. 조립제법에 의해  $(r-2)(2r^2+r+2) = 0$ 이다. 이차방정식  $2r^2+r+2=0$ 의 판별식은  $D = 1^2 - 4(2)(2) = -15 < 0$ 이므로 실근을 갖지 않는다. 따라서 유일한 실근은  $r = 2$ 이다. 이때  $s = 3 - 2(2) = -1$ 이므로  $r \neq s$ 를 만족한다.

따라서 삼차함수  $f(x)$ 는

$$f(x) = (x-2)^2(x+1)$$

로 유일하게 결정된다. (전개하면  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ 로  $c = 0$ 이다.) 구하는 값은

$$f(5) = (5-2)^2(5+1) = 3^2 \times 6 = 9 \times 6 = 54$$

이다. 따라서 정답은 ②이다.

20번 정답 ③

[미적분 I · 정적분과 절댓값 함수의 해석]

출제의도 및 평가요소

절댓값이 포함된 피적분함수의 정적분과 정적분의 절댓값의 차이를 그래프의 부호 구간에 따라 명확히 구분하고, 구간별 정적분 방정식을 해결할 수 있는지 평가한다.

단계별 풀이

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4)$ 이므로  $f(x) = 0$ 의 실근은  $0, 2, 4$ 이다. 부호는  $0 < x < 2$ 에서 양수,  $2 < x < 4$ 에서 음수,  $x > 4$ 에서 양수이다.

$F(t) = \int_0^t f(x) dx$ 라 하면

$$F(t) = \frac{t^4}{4} - 2t^3 + 4t^2 = \frac{t^2(t-4)^2}{4} \geq 0$$

이다. 모든  $t$ 에 대하여  $F(t) \geq 0$ 이므로  $B(t) = |F(t)| = F(t)$ 이다. 또한  $F(0) = 0, F(2) = 4, F(4) = 0$ 이다.

양수  $t$ 의 범위를 세 구간으로 나누어  $A(t) = 3B(t)$ , 즉  $A(t) = 3F(t)$ 를 조사한다.

(i)  $0 < t \leq 2$ 일 때:

구간  $[0, t]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 이므로  $A(t) = F(t)$ 이다. 방정식은  $F(t) = 3F(t) \implies F(t) = 0$ 인데,  $0 < t \leq 2$ 에서  $F(t) > 0$ 이므로 해가 없다.

(ii)  $2 < t \leq 4$ 일 때:

$$A(t) = \int_0^2 f(x) dx - \int_2^t f(x) dx = 4 - \{F(t) - 4\} = 8 - F(t)$$

방정식  $8 - F(t) = 3F(t)$ 에서  $4F(t) = 8 \implies F(t) = 2$ 이다.

$F(4) = 0 \neq 2$ 이므로 근  $t$ 는  $t = 4$ 가 될 수 없다. 따라서  $2 < t < 4$ 에서

$$\frac{t^2(t-4)^2}{4} = 2 \implies \{t(4-t)\}^2 = 8$$

$2 < t < 4$ 에서  $t(4-t) > 0$ 이므로  $t(4-t) = 2\sqrt{2}$ 이다.

$$t^2 - 4t + 2\sqrt{2} = 0 \implies (t-2)^2 = 4 - 2\sqrt{2}$$

$2 < t < 4$ 이므로  $t = 2 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ 이다. 이 값이 가장 작은 양의 실근  $\alpha$ 이다.

(iii)  $t > 4$ 일 때:

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_0^2 f + \int_2^4 f + \int_4^t f \\ &= 4 - (-4) + \{F(t) - F(4)\} = 8 + F(t) \end{aligned}$$

방정식  $8 + F(t) = 3F(t)$ 에서  $2F(t) = 8 \implies F(t) = 4$ 이다.

$$\frac{t^2(t-4)^2}{4} = 4 \implies \{t(t-4)\}^2 = 16$$

$t > 4$ 에서  $t(t-4) > 0$ 이므로  $t(t-4) = 4$ 이다.

$$t^2 - 4t - 4 = 0 \implies (t-2)^2 = 8$$

$t > 4$ 이므로  $t = 2 + 2\sqrt{2}$ 이다. 이 값이 가장 큰 양의 실근  $\beta$ 이다.

따라서  $(\alpha - 2)^2 = 4 - 2\sqrt{2}$ 이고  $(\beta - 2)^2 = 8$ 이므로

$$(\alpha - 2)^2 + (\beta - 2)^2 = (4 - 2\sqrt{2}) + 8 = 12 - 2\sqrt{2}$$

이다. 따라서 정답은 ③이다.

21번 정답 ①

[확률과 통계 · 함수의 구조와 직접 경우 분류]

1. 세 집합으로 나누기

$A = \{f(x) \mid x \in X\}, B = \{f(f(x)) \mid x \in X\}$ 라 하고,  $C = A \setminus B, D = X \setminus A$ 라 하자.  $B = f(A) \subset A$ 이므로  $B, C, D$ 의 원소 수는 각각  $2, 2, 3$ 이다.

$b \in B$ 이면 어떤  $x \in X$ 에 대하여  $b = f(f(x))$ 이므로 (가)에 의해  $f(b) = b$ 이다. 따라서  $B$ 의 원소는 자기 자신으로,  $C$ 의 원소는  $B$ 로,  $D$ 의 원소는  $A = B \cup C$ 로 대응된다. 치역이 정확히  $A$ 이라면  $C$ 의 두 원소가 모두  $D$ 의 함숫값으로 등장해야 한다. 역으로 이 구조를 만족하면 (가), (나)가 모두 성립한다.

$B, C, D$ 를 정했을 때,  $D$ 의 세 원소의 함숫값에  $C$ 의 두 원소가 모두 등장하는 방법은  $18$ 가지이다.  $C$ 의 원소만 사용하면  $2 \times 3 = 6$ 가지이고,  $C$ 의 두 원소와  $B$ 의 원소 하나를 사용하면  $2 \times 3! = 12$ 가지이므로  $6 + 12 = 18$ 이다.

2. 1과 2의 위치에 따른 분류

아래에서 서로 다른 집합에 속하는 경우는 1, 2의 위치를 바꾼 경우까지 포함한다. 먼저 집합을 정하고, 다음으로 함숫값을 정한다.  $B$ 의 함숫값은 이미 고정되어 있다.

(i) 한 원소는  $B$ , 다른 원소는  $C$ :

위치 배정은 2가지, 나머지 5개 중  $B$ 의 다른 원소 선택은 5가지, 남은 4개 중  $C$ 의 다른 원소 선택은 4가지이다.  $C$ 에 속한 1 또는 2의 함숫값은  $B$ 에 속한 쪽으로 고정되고,  $C$ 의 다른 원소의 함숫값은 2가지이다.  $D$ 의 대응은 18가지이므로

$$(2 \times 5 \times 4) \times (2 \times 18) = 1440.$$

(ii) 한 원소는  $B$ , 다른 원소는  $D$ :

집합 선택은  $2 \times 5 \times \binom{4}{2} = 60$ 가지이다.  $D$ 에 속한 1 또는 2는  $B$ 에 속한 쪽으로 대응되어야 한다. 따라서  $D$ 의 나머지 두 원소는  $C$ 의 두 원소에 하나씩 대응되어야 하므로 2!가지이다.  $C$ 의 두 함숫값은 각각  $B$ 에서 선택하므로  $60 \times (2^2 \times 2!) = 480$ .

(iii) 한 원소는  $C$ , 다른 원소는  $D$ :

집합 선택은  $2 \times \binom{5}{2} \times 3 = 60$ 가지이다. 1, 2의 공통 함숫값은  $B$ 에서 선택하므로 2가지,  $C$ 의 다른 원소의 함숫값도 2가지이다.  $D$ 의 나머지 두 원소는  $C$ 의 두 원소에 하나씩 대응되어야 하므로  $60 \times (2 \times 2 \times 2!) = 480$ .

(iv) 둘 다  $C$ :

$C = \{1, 2\}$ 이며  $B$ 의 선택은  $\binom{5}{2} = 10$ 가지이다. 공통 함숫값을  $B$ 에서 선택하는 방법은 2가지이고  $D$ 의 대응은 18가지이므로  $10 \times 2 \times 18 = 360$ .

(v) 둘 다  $D$ :

$B$ 를 고르고  $C$ 를 고르는 방법은  $\binom{5}{2} \binom{3}{2} = 30$ 가지이다.  $D$ 의 세 원소가  $C$ 의 두 원소를 모두 함숫값으로 가지려면, 1, 2의 공통 함숫값은  $C$ 의 한 원소이고  $D$ 의 남은 원소는  $C$ 의 다른 원소로 대응되어야 한다. 이 방법은 2가지이며,  $C$ 의 두 함숫값은 각각  $B$ 에서 선택하므로  $30 \times 2 \times 2^2 = 240$ .

(vi) 둘 다  $B$ :  $f(1) = 1, f(2) = 2$ 이므로 불가능하다.

위 여섯 경우는 서로 겹치지 않으며 모든 경우를 포함한다. 따라서 구하는 함수의 개수는

$$1440 + 480 + 480 + 360 + 240 = \boxed{3000}.$$

따라서 정답은 ①이다.